Calcolo di Limiti

Notazione utilizzata

1. $\alpha,\ \ell_1,\ \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$
2. $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$
3. F.I. = Forma Indeterminata o Forma di Indecisione
4. dove non diversamente specificato valgono le regole dei segni per α, ℓ_1, ℓ_2

Funzioni potenza $f(x) = x^n$

$$\lim_{x\to c} x^n = c^n$$

n pari: $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$

n dispari: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

Funzioni radice $f(x) = \sqrt[n]{x}$

n pari, $c > 0$: $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0^+,\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c},$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

n dispari: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c},\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty,$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Funzioni esponenziali $f(x) = a^x$

$$\lim_{x\to c} a^x = a^c$$

$a > 1$: $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$0 < a < 1$: $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$

Funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$

$c > 0$: $\lim_{x\to c} \log_a x = \log_a c$

$a > 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$

$0 < a < 1$: $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

Operazioni tra limiti

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell_2$$

Limite della somma

$$\lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$
a	b	a + b
a	$+\infty$	$+\infty$
a	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite del prodotto

$$\lim_{x\to\alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$$

ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 \cdot \ell_2$
a	b	a · b
a > 0	$+\infty$	$+\infty$
a > 0	$-\infty$	$-\infty$
a < 0	$+\infty$	$-\infty$
a < 0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	F.I.

Limite del quoziente

$$\lim_{x\to\alpha} [f(x)/g(x)] = \ell_1/\ell_2$$

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_1/ℓ_2
a	b ≠ 0	a/b
a ≠ 0	0	∞
0	0	F.I.
a	∞	0
∞	b	∞
∞	∞	F.I.

Limite della potenza

$$\lim_{x\to\alpha} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \ell_1^{\ell_2}$$

ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1^{\ell_2}$
a > 0	b	a^b
$0 \leqslant a < 1$	$+\infty$	0^+
$0 \leqslant a < 1$	$-\infty$	$+\infty$
a > 1	$+\infty$	$+\infty$
a > 1	$-\infty$	0^+
0	0	F.I.
1	∞	F.I.
∞	0	F.I.

Limite delle funzioni composte

Siano $y = f(z)$ e $z = g(x)$ tali che $f(z)$ è continua in z_0 e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = z_0$. Allora $\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f(z_0)$

Es.: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{e^x} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} e^x} = \left[\sqrt{e^{-\infty}}\right] = \left[\sqrt{0^+}\right] = 0$

Forme Indeterminate

$$+\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \cdot \infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Forma Indeterminata $+\infty - \infty$

Funzioni razionali intere: si raccoglie a fattor comune la variabile x con l'esponente maggiore

Forma Indeterminata ∞/∞

Funzioni razionali fratte: si raccoglie a fattor comune la variabile x con l'esponente maggiore al numeratore e al denominatore

Forma Indeterminata ∞/∞

Funzioni razionali fratte: si scompongono in fattori il numeratore e il denominatore

Forma Indeterminata $0 \cdot \infty$

si può ricondurre alle precedenti F.I. utilizzando le seguenti uguaglianze

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)} \quad \text{oppure} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

Forma Indeterminata $0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

può essere utile utilizzare la seguente uguaglianza, valida per $f(x) > 0$:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$